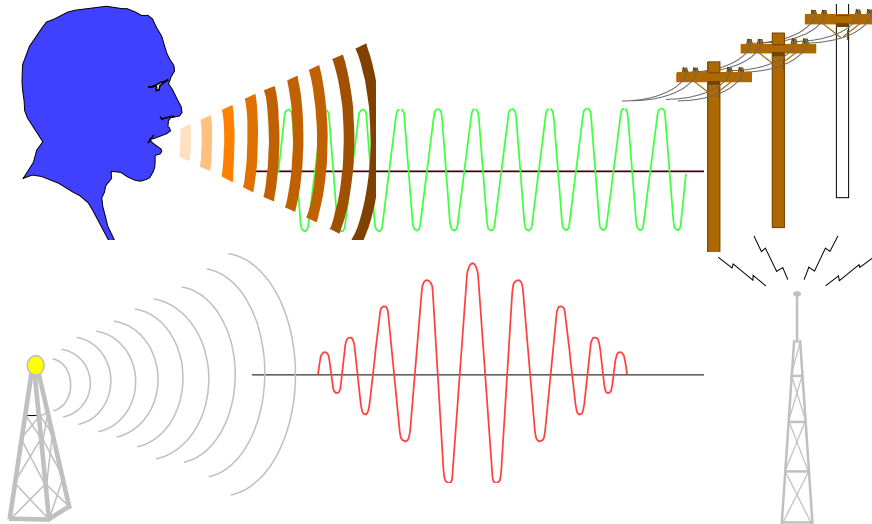


Formelsammlung

Nachrichtentechnik

Inhaltsverzeichnis

.....	1
1. Digitale Daten.....	2
2. Signale.....	3
3. Leitungstheorie.....	8
4. Modulation.....	12
5. Filter.....	14
6. Digitalfilter.....	17
7. Up and Downsampling.....	18
8. Pulse Shaping.....	19



Autor: Drifte Marcel

Datum: 19. Nov. 2006

Dokumentname: **NachrTech.sxw** (*openoffice.org*)

Dokument zu finden unter: **www.formelsammlung.telabo.ch**

1. Digitale Daten

1.1 Entscheidungsgehalt pro Zeichen

$H_0 = \log_2(N)$	N	: Zeichenvorrat	[]
Siehe auch 1.9	H_0	: Entscheidungsgehalt	[bit]
	z.B. ASCII N=256 => $H_0=8$		

1.2 Informationsgehalt eines Zeichen

$H_i = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$	p_i	: Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen	[0..1]
	H_i	: Entscheidungsgehalt eines Zeichens	[bit]

1.3 Mittlerer Informationsgehalt pro Zeichen

$H = \sum_{i=1}^N p_i \cdot H_i$	N	: Anzahl Zeichen	[]
Es gilt immer:	p_i	: Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen	[0..1]
$H \leq H_0$	H_i	: Entscheidungsgehalt eines Zeichens	[bit]
	H	: mittlerer Informationsgehalt	[bit]

1.4 Codierung und Redundanz

1.4.1 Mittlere Codewortlänge

$L = \sum_{i=1}^N p_i \cdot L_i$	N	: Anzahl Zeichen	[]
Es gilt:	L	: Mittlere Codewortlänge	[bit]
$L \geq H$	p_i	: Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen	[0..1]
	L_i	: Codewortlänge des i-te Zeichen	[bit]
	H	: mittlerer Informationsgehalt	[bit]

1.4.2 Absolute Redundanz

$R = L - H$	R	: Absolute Redundanz	[bit]
	H	: mittlerer Informationsgehalt	[bit]
	L	: Mittlere Codewortlänge	[bit]

1.4.3 Relative Redundanz

$r = \frac{R}{L}$	R	: Absolute Redundanz	[bit]
$r = \frac{L-H}{L}$	r	: Relative Redundanz	[0..1]
	H	: mittlerer Informationsgehalt	[bit]
	L	: Mittlere Codewortlänge	[bit]

1.4.4 Mittlere Zeichendauer

$T_Z = \sum_{i=1}^N p_i \cdot T_{Z_i}$	T_Z	: Mittlere Zeichendauer	[s]
	T_{Z_i}	: Dauer des i-ten Zeichens	[s]
	p_i	: Häufigkeit des Auftretens des i-ten Zeichen	[0..1]

1.5 Optimale Codierung nach Huffman

Idee: Sortieren nach Häufigkeit

Vorgehen:

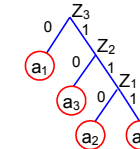
- Sortiere Zeichen nach Häufigkeit
- Fasse die 2 mit der kleinsten Häufigkeit zusammen zu einem neuen Gruppe und Summiere die Häufigkeit.
- Sortier Zeichen neu
- Gehe zu Schritt 2 bis nur noch 2 Zeichen oder Gruppen in der Liste sind.
- Erstelle Binärbaum und beginne mit Liste mit 2 Einträgen bis zum Schluss.

BEM: Damit Code entzifferbar ist dürfen Zeichen nur als Blätter des Codebaumes auftreten.

BSP:

X_i	p_i	X_i	p_i	X_i	p_i
a_1	p_1	a_1	p_1	a_1	p_1
a_3	p_3	a_{24}	$p_{2+ p_4}$	a_{243}	$p_{2+ p_4+ p_3}$
a_2	p_2	a_3	p_3		
a_4	p_4				

Codebaum



1.6 Prüf- und korrigierbare Codes

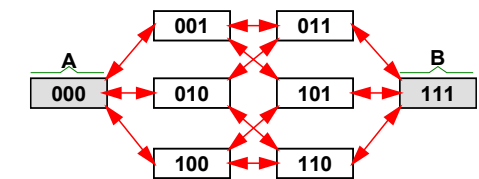
- Merkmale:**
- Meist Code mit fester Länge
 - Unvollständige Code Tabelle
- Im Falle des 3 Bit Code gilt:
- Erkennung von 2 bit Fehlern
 - Hamin Abstand $d_{min}=3$

Haming Abstand:
 $d_{min} =$ kürzeste Distanz zwischen den Punkten A-B. Es werden die Strecken gezählt.

Es gilt:

$$q < d$$

BSP 3Bit Code für 2 Zeichen {A,B}



d_{min} : Haming Abstand []
 q : Vielfachheit []

1.7 Maximale Datenrate über über eine Analog Verbindung (TF)

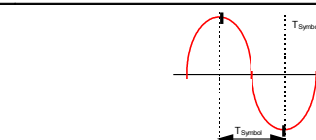
Die maximale Datenrate ist abhängig von der Bandbreite sowie dem Störabstand SNR

Symbolabstand:

$$T_{Symbol} = \frac{1}{2 \cdot B}$$

dh. max 2 Symbole pro Hz

Baudrate siehe 1.8



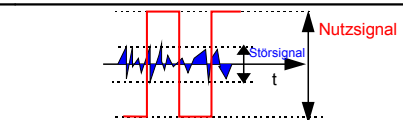
B : Bandbreite [Hz]
 T_{Symbol} : Symbolabstand [s]

Unterscheidbare Signalpegel nach Shanon

$$N = \sqrt{1 + \frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}}}$$

$P_{Stoer} \ll P_{Nutz}$

$$N \approx \sqrt{\frac{P_{Nutz}}{P_{Stoer}}}$$



P_{Nutz} : Nutzsinal [W]
 P_{Stoer} : Störsignal [W]
 N : Anzahl Signalpegel / Symbole []

1.8 Baudrate

$Q' = \frac{1}{T_{\text{Symbol}}}$	Q' : Baudrate [bit/s]
$Q' = 2 \cdot B$	B : Bandbreite [Hz]
	T _{Symbol} : Symbolabstand [s]
Siehe auch 1.12	

1.9 Entscheidungsgehalt pro Symbol

$H_0 = \log_2(N) \approx \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stör}}}\right)$	N : Anzahl Symbole []
$H_0 = \frac{1}{2} \frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{10 \cdot \log(2)}$	H ₀ : Entscheidungsgehalt [bit]
$H_0 \approx \frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{6}$	P _{Nutz} : Nutzsignal [W]
	P _{Stör} : Störsignal [W]
	SNR : (Signal to noise ration) [dB]

1.10 Signal-Rausch Abstand

SNR (Signal to noise ration)	P _{Nutz} : Nutzsignal [W]
$\text{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Stör}}}\right)$	P _{Stör} : Störsignal [W]
	SNR : (Signal to noise ration) [dB]

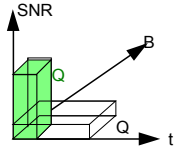
1.11 Mittlerer Nachrichtenfluss / Informationsfluss

$H' = \frac{H_0}{T_{\text{Symbol}}}$	H ₀ : Entscheidungsgehalt [bit]
$H' = \frac{B \cdot \text{SNR}}{3}$	B : Bandbreite [Hz]
	H' : Mitt. Nachrichtenfluss [Bit/s]
	T _{Symbol} : Symbolabstand [s]
	SNR : (Signal to noise ration) [dB]

1.12 Kanalkapazität (Baudrate)

$C = 2 \cdot B \cdot \log_2(N)$	N : Anzahl Symbole siehe 1.7 []
$C \approx \frac{B \cdot \text{SNR}_{\text{dB}}}{3}$	C=H' : Signal Kapazität [Bit/s]
	B : Bandbreite [Hz]
	SNR : (Signal to noise ration) [dB]
Siehe auch 1.8	

1.13 Nachrichten Quader

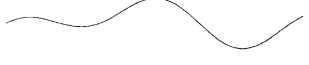
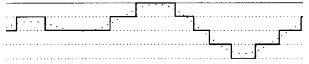
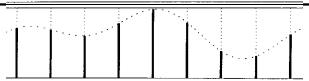
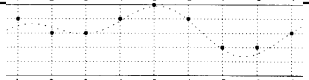
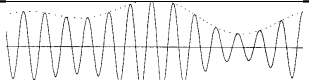
$Q = \frac{1}{3} B \cdot \text{SNR} \cdot dt$	
	
	B : Bandbreite [Hz]
	SNR : (Signal to noise ration) [dB]
	t : Zeit [s]

2. Signale

2.1 Signal Klassifizierung

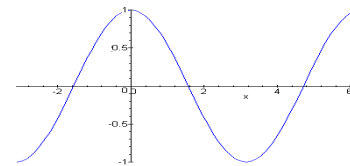
Klasse	Beschreibung
determiniert	Signalverlauf von $-\infty \dots \infty$ bekannt
stochastisch	Signalverlauf ist zufällig und nur ausschnittsweise bekannt. Der Ausschnitt sollte eine rep. Stichprobe des gesamten Signals sein.
Leistungssignal	Unendliche Energieinhalt von $-\infty \dots \infty$
Energiesignal	Einmaliges Signal mit endlichem Energieinhalt
periodisch	Ein sich wiederholender Signalverlauf
nicht periodisch	Signalverlauf nicht periodisch. Es kann sich um ein Leistungs- oder Energiesignal handeln

2.2 Signalarten

Signalart	Eigenschaften	Bild
Analog	Wert: kontinuierlich Zeit: kontinuierlich	
Quantisiert	Wert: diskret Zeit: kontinuierlich	
Abgetastet	Wert: kontinuierlich Zeit: diskret	
Digital	Wert: diskret Zeit: diskret	
Moduliert		

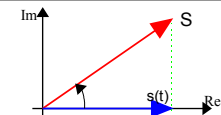
2.3 Harmonische Schwingung (Einton Signal)

Spezifikationsparameter	\hat{S} : Amplitude []
	f : Frequenz [Hz]
	φ : Phase [rad]
	Abmachung: $\cos(\varphi) = 1 \quad \forall \quad \varphi = 0$



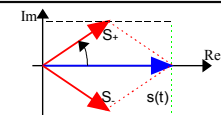
Einzeiger Darstellung

$$S = \hat{S} \cdot e^{j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)}$$

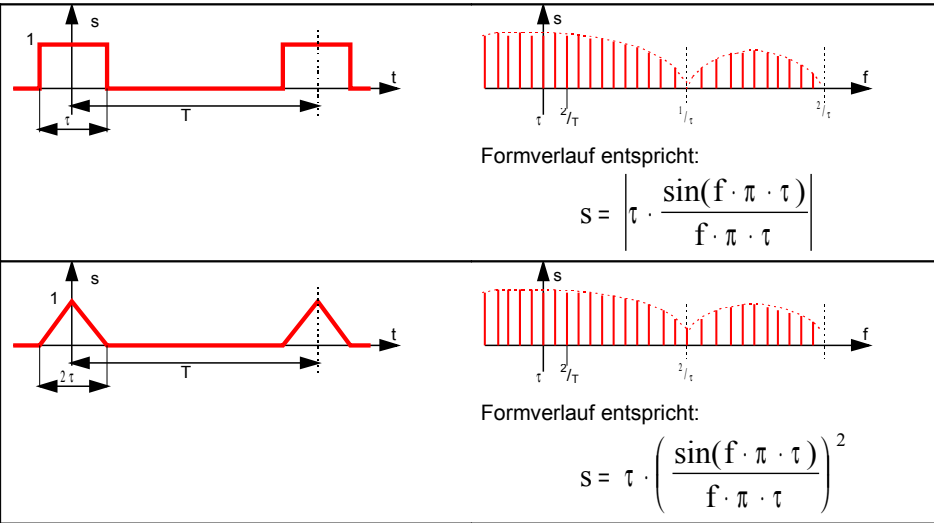


Zweizeiger Darstellung

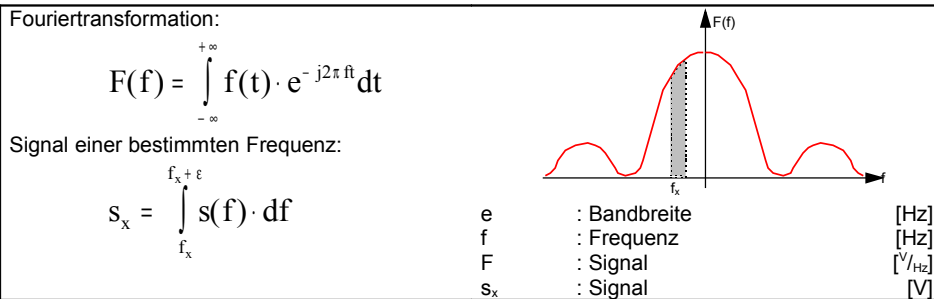
$$S = \frac{\hat{S}}{2} \cdot e^{j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)} + \frac{\hat{S}}{2} \cdot e^{-j(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)}$$



2.4 Linienspektren



2.4.1 Spektrum „einmaliger“ Signale

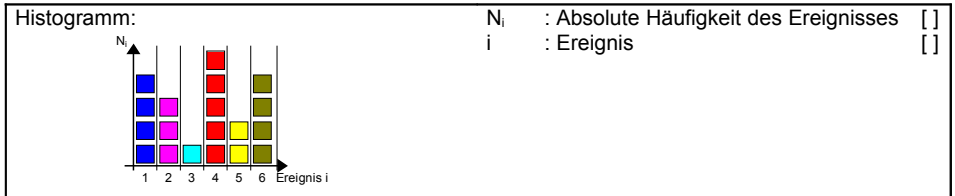


2.4.2 Fouriertransformation von Leistungsignalen

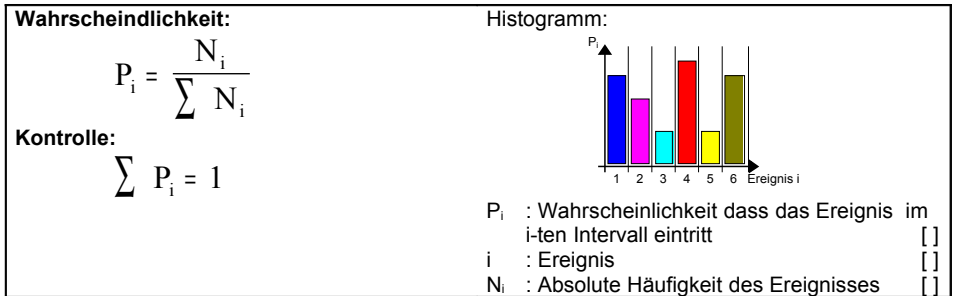
$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

2.5 Stochastische Signale

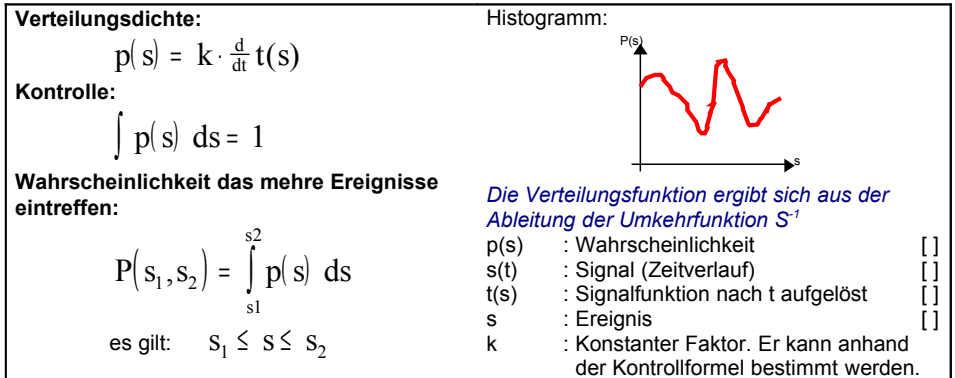
2.5.1 Absolute Häufigkeitsverteilung



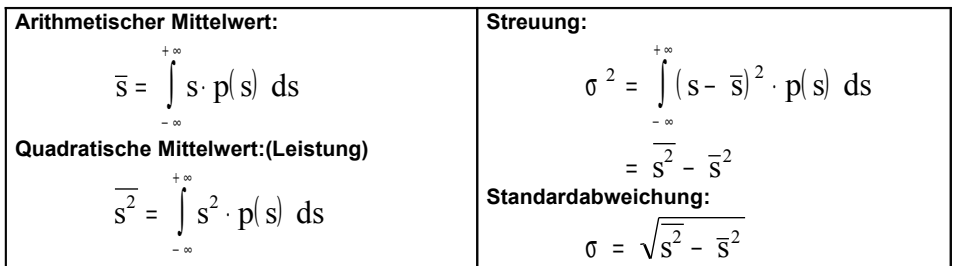
2.5.2 Relative Häufigkeitsverteilung / Diskrete Häufigk.verteilung



2.5.3 Verteilungsdichte



2.5.4 Statische Kennzahlen



2.5.5 Typische Verteilfunktionen

Allgemeine Gleichverteilung	
Einseitige Gleichverteilung	
Symmetrische Gleichverteilung	
Normal- /Gaussverteilung Allgemeine Form: $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma^2}}$ Normierte Form: $p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \quad \lambda = \frac{s-\bar{s}}{\sigma}$ Entspricht der Form $\bar{s}=0$ und $\sigma=1$	 p(s) : Wahrscheinlichkeit [] sigma : Standardabweichung siehe 2.5.4 [] s-bar : Aritmetische mittel siehe 2.5.4 [] s : Ereignis []

2.6 Zeitmittelwert

2.6.1 Linearer Mittelwert

Aus der Zeitfunktion $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt$	Aus der Verteilungsdichte $\bar{s} = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot p(s) ds$
Aus den Fourier Koeffizienten $\bar{s} = a_0$	a ₀ : Fourier Koeffizienten [] s(t) : Signalfunktion [] t : Zeit [s] T : Periode [s] p(s) : Wahrscheinlichkeit [] s : Ereignis []

2.6.2 Signalleistung

Aus der Zeitfunktion $P = \overline{s^2} = \frac{1}{T} \int_T s^2(t) dt$	P : Signalleistung [V ²] c _n : kompl. Fourierkoeffizienten [V] t : Zeit [s] T : Periode [s] p(s) : Wahrscheinlichkeit [] s : Ereignis []
Aus den Fourier Koeffizienten $P = \sum c_n ^2$ <small>Summe aller Koeffizienten</small>	
Aus der Dichteverteilung $P = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) ds$	
Aus dem Leistungsspektrum $P = \int_{-\infty}^{+\infty} L_s(f) df$	

2.6.3 Effektivwert

$s_{\text{eff}} = \sqrt{P}$	P : Leistung [V ²] s _{eff} : Spannung [V]
-----------------------------	---

2.7 Korrelation

2.7.1 Definition

Korrelationsfunktion charakterisiert die Ähnlichkeit zweier Signale in Abhängigkeit eines Zeitlichen versatzes τ .

Es wird unterschieden zwischen:

- **Kreuzkorrelation:** Zwei unabhängige Signale werden verglichen und
- **Autokorrelation:** Das Signal wird mit sich selbst verglichen.

MatLab: `xcorr(sx,sy)`

2.7.2 Korrelation zweier Leistungssignale

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_x(t) \cdot s_y(t + \tau) dt$$

τ : Versatz der Signale untereinander [s]
 s : Signal [V]
 t : Zeit [s]

2.7.3 Korrelation mit einem Energiesignal (eines oder beide)

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(t) \cdot s_y(t + \tau) dt$$

τ : Versatz der Signale untereinander [s]
 s : Signal [V]
 t : Zeit [s]

2.8.1 Absoluter Pegel

Spannungspegel: **Bezugsgröße:** Signal 1mW und $R_L=600 \Omega$

$$L_u = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_x}{0.7746V}\right)$$

L_u : Spannungspegel [dBm]
 L_i : Strompegel [dBm]
 L : Leistungspegel [dBm]

Strompegel:

$$L_i = 20 \cdot \lg\left(\frac{I_x}{1.29 \cdot 10^{-3} A}\right)$$

Leistungspegel

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_x}{1 \cdot 10^{-3} W}\right)$$

2.8.2 Relativer Pegel

Spannungspegel in dB

$$L_u = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_x}{U_0}\right)$$

L_u : Spannungspegel [dB]
 L_i : Strompegel [dB]
 L : Leistungspegel [dB]

Strompegel in dB

$$L_i = 20 \cdot \lg\left(\frac{I_x}{I_0}\right)$$

Leistungspegel in dB

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_x}{P_0}\right)$$

Spannungspegel in Np

$$L_u = 20 \cdot \ln\left(\frac{U_x}{U_0}\right)$$

L_u : Spannungspegel [Np]
 L_i : Strompegel [Np]
 L : Leistungspegel [Np]

Strompegel in Np

$$L_i = 20 \cdot \ln\left(\frac{I_x}{I_0}\right)$$

Umrechnung:

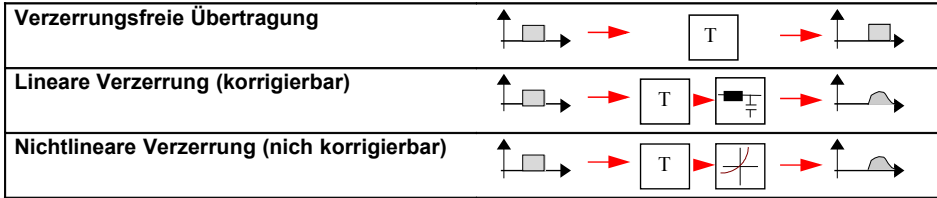
$$1 \text{ Np} = 8.688 \text{ dB}$$

$$1 \text{ dB} = 0.1151 \text{ Np}$$

Leistungspegel in Np

$$L = 10 \cdot \ln\left(\frac{P_x}{P_0}\right)$$

2.9 Übertragungsverhalten von 2 Toren



2.9.2 Klirrfaktor

Spannungssignale

$$k = \sqrt{\frac{S_2^2 + S_3^2 + \dots}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots}}$$

\hat{S}_i : Amplituden der Harm. (Fourierkoef.) [V]
 $\hat{S}_i^2 = P$: Signalleistung [V²]
 k : Klirrfaktor []

Aus dem Leistungssignalen Der Gleichspannungsteil wird ignoriert

$$k = \sqrt{\frac{P_2 + P_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}}$$

Messtechnisch

$$k = \sqrt{\frac{P_{tot} - P_{DC} + P_1}{P_{tot} - P_{DC}}}$$

P_1 : Leistung der Grundharmonischen [W]
 P_{tot} : Gesamtleistung des Signals [W]
 P_{DC} : Leistung des DC Anteils [W]

2.9.3 Intermodulationsmessungen

Die optimale Kurve des Verzerrungsgliedes wäre eine Quadratische Kurve

Intermodulationsgrad:

$$m = \frac{\hat{U}_{NF}}{\hat{U}_{HF}}$$

m ist häufig in %

2.10 Digitale Signale

2.10.1 Digitalisierung

Die Digitalisierung setzt sich aus folgenden Schritten zusammen

1. Abtastung
2. Quantisierung
3. Codierung

2.10.2 Abtastung

Abtastfrequenz : $f_s = 1/T_s$
 Abtastperiode : T_s
 Aperturzeit : t_a
 Sample Hold :

2.10.3 Quantisierung

Quantisierungsfehler:

$\epsilon = \text{Quantisierungsfehler}$

2.10.4 Spektrum einer Holdschaltung D/A Wandler

f_s : Abtastfrequenz [Hz]
 f : Frequenz [Hz]

$$|\text{sinc}| = \frac{|\sin(2\pi \cdot f \cdot \frac{1}{f_s})|}{2\pi \cdot f \cdot \frac{1}{f_s}}$$

3. Leitungstheorie

3.1 Leitungsbeläge

Widerstandsbelag $R' = \frac{dR}{dx}$	C' : Kapazitätsbelag [F/m]
Ableitungsbelag $G' = \frac{dG}{dx}$	G' : Ableitungbelag [S/m]
Induktivitätsbelag $L' = \frac{dL}{dx}$	L' : Induktivitätsbelag [H/m]
Kapazitätsbelag $C' = \frac{dC}{dx}$	R' : Widerstandsbelag [Ω/m]
Paralleldrahtleitung $C' = \frac{\pi \epsilon}{\ln(\frac{a}{r})}$ $L' = \frac{\mu}{\pi} \ln(\frac{a}{r} + k)$	a : Leiterabstand [m] r : Radius [m] k : Korrekturterm ($k \rightarrow 0$ für $f \rightarrow \infty$) [] ϵ : Dielektrizitätskonstante [AS/Vm] μ : Permeabilität [Vs/Am]
Koaxialkabel $C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(\frac{d_a}{d_i})}$ $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(\frac{d_a}{d_i} + k)$	d_a : Aussendurchmesser [m] d_i : Innendurchmesser [m] k : Korrekturterm ($k \rightarrow 0$ für $f \rightarrow \infty$) [] ϵ : Dielektrizitätskonstante [AS/Vm] μ : Permeabilität [Vs/Am]
Es gilt: $L' C' = \mu \cdot \epsilon$	C' : Kapazitätsbelag [F/m] L' : Induktivitätsbelag [H/m]

3.2 Allgemeine Leitungsgleichungen

Für die Spannung $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = R' G' u(x,t) + (R' C' + G' L') \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$
Für den Strom $\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = R' G' i(x,t) + (R' C' + G' L') \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}$
C' : Kapazitätsbelag [F/m] G' : Ableitungbelag [S/m] $i(x,t)$: Strom zum Zeitpunkt t am Ort x [A] L' : Induktivitätsbelag [H/m] R' : Widerstandsbelag [Ω/m] t : Zeit [s] $u(x,t)$: Spannung zum Zeitpunkt t am Ort x [V] x : Leitungsposition [m]

3.3 Verlustlose Leitung

Voraussetzung: $R'=0, G'=0$ bzw $R' \ll \omega \cdot L', G' \ll \omega \cdot C'$

Für die Spannung	C' : Kapazitätsbelag [F/m]
	G' : Ableitungbelag [S/m]

$u(x,t) = u_h(t - \frac{x}{v}) + u_r(t + \frac{x}{v})$	i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A]
Für den Strom	i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A]
$i(x,t) = i_h(t - \frac{x}{v}) - i_r(t + \frac{x}{v})$	L' : Induktivitätsbelag [H/m]
Wellengeschwindigkeit	R' : Widerstandsbelag [Ω/m]
$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$	t : Zeit [s]
	u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V]
	u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V]
	v : Wellengeschwindigkeit [m/s]
	x : Position [m]

3.3.1 Wellenwiderstand in verlustlosen Leitung

Es gilt allgemein:	C' : Kapazitätsbelag [F/m]
$u_h = R_w \cdot i_h$	i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A]
$u_r = R_w \cdot i_r$	i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A]
Wellenwiderstand	L' : Induktivitätsbelag [H/m]
$R_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$	R_w : Wellenwiderstand [Ω]
$R_w = \frac{1}{C' \cdot v}$	u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V]
	u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V]
	v : Wellengeschwindigkeit [m/s]

3.3.2 Messbare Grösse am Punkt x im Zeitpunkt t

Spannung:	i : Strom [A]
$u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$	i_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [A]
	i_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [A]
Strom:	p : Leistung [W]
$i(x,t) = i_h(x,t) - i_r(x,t)$	t : Zeit [s]
	u : Spannung [V]
Leistung:	u_h : Summe aller hinlaufenden Wellen [V]
$p(x,t) = p_h(x,t) - p_r(x,t)$	u_r : Summe aller rücklaufenden Wellen [V]
	x : Leitungsposition [m]

3.3.3 Reflexion am Leitungsende / Anfang auf verlustloser Leitung

Reflexion hinlauf. Welle am Leitungsende	r_L : Reflexionsfaktor Last [-1...1]
$r_L = \frac{R_L - R_w}{R_L + R_w}$	r_Q : Reflexionsfaktor Quelle [-1...1]
	R_w : Wellenwiderstand [Ω]
Ende kurzgeschlossen:	$r = -1$
Es gilt: $u_r = r_L \cdot u_h$ $i_r = r_L \cdot i_h$	
Reflexion rückl. Welle am Leitungsanfang	Ende offen:
$r_Q = \frac{R_Q - R_w}{R_Q + R_w}$	$r = 1$
Es gilt: $u_h = r_Q \cdot u_r$ $i_h = r_Q \cdot i_r$	

3.3.4 Sinusförmige Signale auf verlustloser Leitung

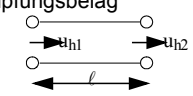
Phasengeschwindigkeit	ω : Frequenz [rad/s]
$v_p = v = \frac{1}{\sqrt{L'C}}$	β : Phasenbelag
Phasenbelag	λ : Wellenlänge [m]
$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega \cdot \sqrt{L'C}$	λ_0 : Wellenlänge Licht [m]
Wellenlänge	μ_r : Permeabilitätszahl []
$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$	ϵ_r : Permittivitätszahl []
Verkürzungsfaktor	c : Lichtgeschwindigkeit [m/s]
$k = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$	C' : Kapazitätsbelag [F/m]
	f : Frequenz [Hz]
	k : Verkürzungsfaktor
	L' : Induktivitätsbelag [H/m]
	v_p, v : Phasengeschwindigkeit [m/s]

3.3.5 Eingangsimpedanz auf verlustloser Leitung

Eingangsimpedanz der Leitung	ℓ : Leitungslänge [m]
$Z_{Ein} = R_w \frac{1 + r_L e^{-j\beta \cdot 2 \cdot \ell}}{1 - r_L e^{-j\beta \cdot 2 \cdot \ell}}$	β : Phasenbelag
$Z_{Ein} = Z_L \frac{1 + j \frac{R_w}{Z_L} \tan(\beta \cdot \ell)}{1 + j \frac{R_w}{Z_L} \tan(\beta \cdot \ell)}$	r_L : Reflexionsfaktor Last [-1...1]
Eingangsimpedanz ende kurzgeschlossen	r_Q : Reflexionsfaktor Quelle [-1...1]
$Z_{Ein0} = j \cdot R_w \cdot \tan(\beta \cdot \ell)$	R_w : Wellenwiderstand [Ω]
Eingangsimpedanz ende offen	Z_{Ein} : Eingangsimpedanz [Ω]
$Z_{Ein\infty} = -j \cdot R_w \cdot \cot(\beta \cdot \ell)$	Z_L : Lastimpedanz [Ω]

3.4.1 Sinusförmige Signale auf verlustbehafteter Leitung

Übertragungsbelag	α : Dämpfungsbelag [Np]
$\gamma = \alpha + j\beta$	β : Phasenbelag
$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$	γ : Übertragungsbelag
Dämpfungsbelag / Dämpfungskoeffizient	ω : Frequenz [rad/s]
$\alpha = \text{Re}(\gamma)$	f : Frequenz [Hz]
Phasenbelag / Phasenkoeffizient	L' : Induktivitätsbelag [H/m]
$\beta = \text{Im}(\gamma)$	C' : Kapazitätsbelag [F/m]
Wellenimpedanz	Z_w : Wellenwiderstand [Ω]
$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$	ϵ_r : Permittivitätszahl []
Reflexionsfaktor der Last	μ_r : Permeabilitätszahl []
$r_L = \frac{Z_L - Z_w}{Z_L + Z_w}$	c : Lichtgeschwindigkeit [m/s]
Reflexionsfaktor der Quelle	Z_L : Lastimpedanz [Ω]
$r_Q = \frac{Z_Q - Z_w}{Z_Q + Z_w}$	ℓ : Leitungslänge [m]
Leitungsdämpfung	r_L : Reflexionsfaktor der Last []
$A = \alpha \cdot \ell$	r_Q : Reflexionsfaktor der Quelle []
	R' : Widerstandsbelag [Ω/m]
	G' : Ableitungbelag [S/m]
	Z_Q : Quellenwiderstand [Ω]
	Z_L : Lastwiderstand [Ω]
	A : Dämpfung [dB]
	ℓ : Leitungslänge [m]
	α : Dämpfungsbelag [Np]



3.4.2 Eingangsimpedanz auf verlustbehafteter Leitung

Eingangsimpedanz	r_L	: Reflexionsfaktor Last	[-1...1]
$Z_{Ein} = \frac{u_1}{i_1}$	r_Q	: Reflexionsfaktor Quelle	[-1...1]
$Z_{Ein} = Z_w \frac{1+r_L \cdot e^{-\gamma \cdot 2\ell}}{1-r_L \cdot e^{-\gamma \cdot 2\ell}}$	Z_{Ein}	: Eingangsimpedanz	[Ω]
	Z_w	: Wellenwiderstand	[Ω]
	ℓ	: Leitungslänge	[m]
	γ	: Übertragungsbelag	

$$Z_{Ein} = Z_L \frac{1 + \frac{Z_w}{Z_L} \tanh(\gamma \cdot \ell)}{1 + \frac{Z_L}{Z_w} \tanh(\gamma \cdot \ell)}$$

Eingangsimpedanz ende kurzgeschlossen

$$Z_{Ein0} = Z_w \cdot \tanh(\gamma \cdot \ell)$$

Eingangsimpedanz ende offen

$$Z_{Ein\infty} = Z_w \cdot \coth(\gamma \cdot \ell)$$

3.5 Stehwellenverhältnis (VSWR)

$VSWR = \frac{\hat{u}_{max}}{\hat{u}_{min}}$	
$VSWR = \frac{u_h + u_r}{u_h - u_r}$	
$VSWR = \frac{1 + r_L }{1 - r_L }$	

VSWR : Stehwellenverhältnis []
 (Häufig in dB angegeben)

r_L	: Reflexionsfaktor Last	[-1...1]
u_h	: Summe aller hinlaufenden Wellen	[V]
u_r	: Summe aller rücklaufenden Wellen	[V]

3.6 Leitungsverzweigungen

$$r_1 = \frac{(R_{w2} \parallel R_{w3}) - R_{w1}}{(R_{w2} \parallel R_{w3}) + R_{w1}}$$

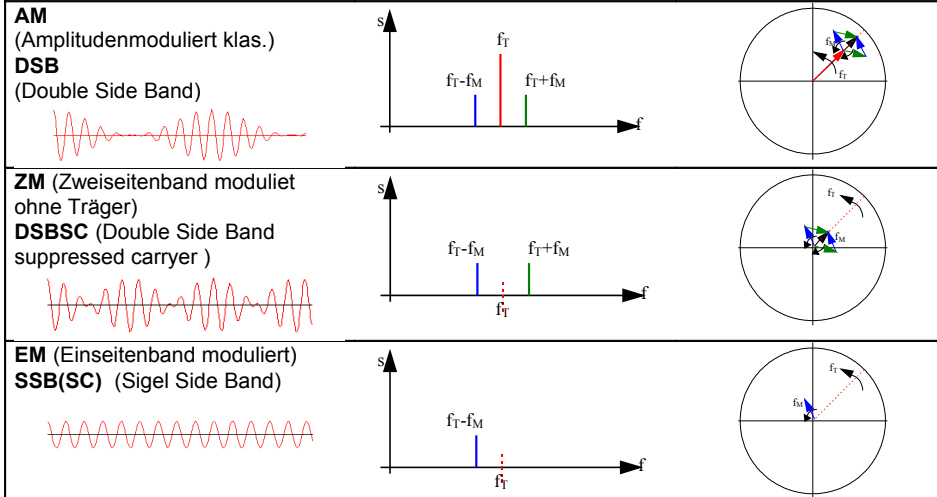
r_1 : Reflexionsfaktor []

3.7 Beispiel eines Wellenfahrplans

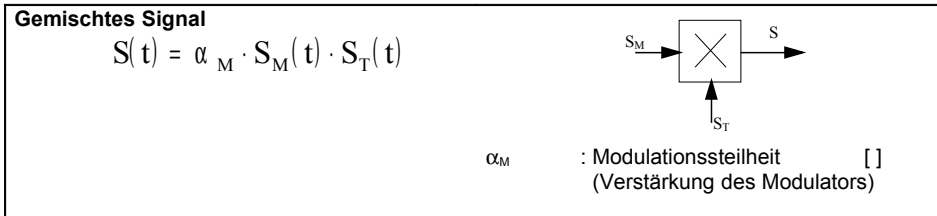
ℓ	: Leitungslänge	[m]
x	: Position vom Leitungsanfang	[m]
t	: Zeit	[s]

4. Modulation

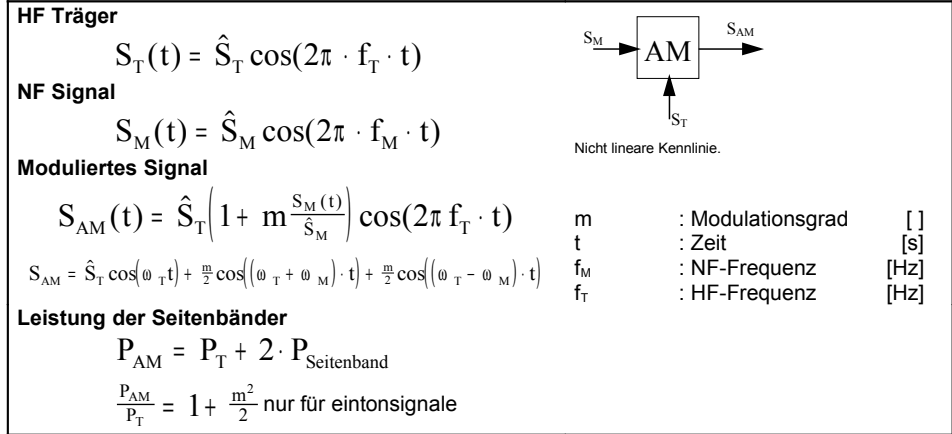
4.1 Amplituden modulierte Signale



4.2 Mischen von zwei Signalen



4.3 Klassische Amplitudenmodulation AM



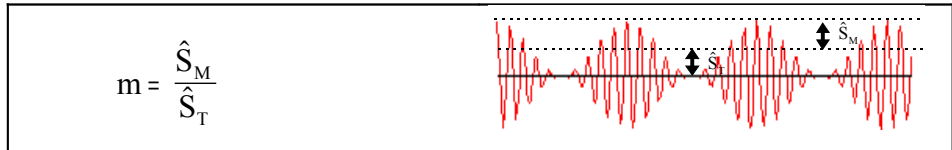
4.4 Zweiseitenband Modulation ZM

Realisierung mit Mischer siehe 4.2

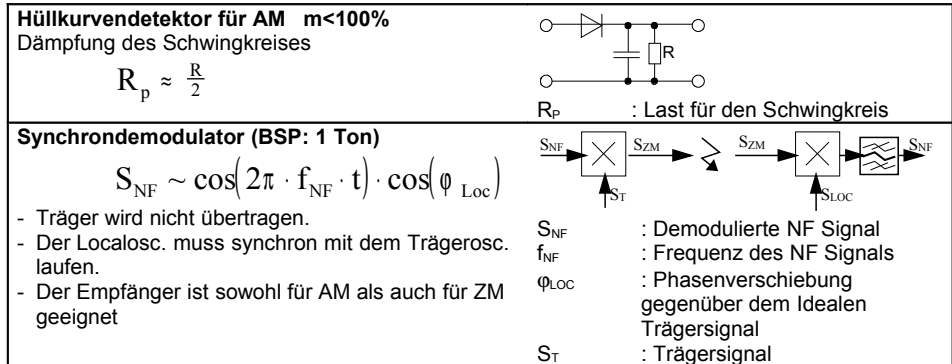
4.5 Einseitenband Modulation EM

Realisierung mit Mischer und nachfolgendem Filter. BEM: Reduziert Bandbreite, aber nicht Sendeleistung

4.6 Modulationsgrad m



4.7 Demodulation



4.8 Phasenmodulation (PM)

Phasenmodulation α_P : Modulationskonstante
 η : Phasenhup

$$S_{PM}(t) = \hat{S}_T \cos(\omega_T \cdot t + \alpha_P \cdot s_M(t))$$

Phasenhup

$$\eta = \alpha_P \cdot \hat{S}_M$$

4.9 Frequenzmodulation (FM)

Phasenmodulation α_F : Modulationskonstante
 $\Delta\omega_{HF}$: Frequenzhub

$$S_{FM}(t) = \hat{S}_T \cos\left(\omega_T \cdot t + \int_0^t \alpha_F \cdot s_M(t) dt\right)$$

Frequenzhub

$$\Delta\omega_{HF} = \alpha_F \cdot \hat{S}_M$$

4.10 Einton - Winkelmodulation (PM/FM)

Eintonwinkelmodulation η : Phasenhup (PM)
 η : Modulationsindex (FM) []

$$S_{PM/FM}(t) = \hat{S}_T \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_M \cdot t))$$

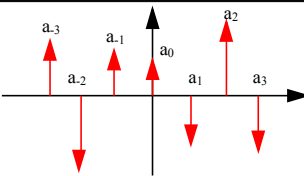
Modulationsindex (FM) ω_M : Frequenz Einton [Hz]
 ω_T : Frequenz Träger [Hz]
 t : Zeit [t]

$$\eta = \frac{\Delta\omega_{HF}}{\omega_M}$$

Spektrum

$$S_{PM/FM}(t) = \hat{S}_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \cos((\omega_T + n \cdot \omega) \cdot t)$$

wobei

$$J_n(\eta) = (-1)^n \cdot J_{-n}(\eta)$$


4.11 Praktische Bandbreite (PM/FM)

$$B_{PM/FM} = 2(\eta + 1) \cdot f_M$$

5. Filter

5.1 Frequenzgang aus der Laplacetransformierten Funktion

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

5.1.1 Definition und Normierungen

Grenzfrequenz:
 f_g

Normierte Frequenz:
 $P = j\Omega = \frac{j\omega}{\omega_0}$

Knickfrequenz:
 $\Omega_{oi} = \frac{\omega_{oi}}{\omega_g}$

Dämpfung:
 $\xi = \frac{1}{2Q}$

Güte:
 $Q = \frac{1}{2\xi}$

5.2 Tiefpassfilter

1. Ordnung

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{oi}}}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega_{oi}} P}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + a_i \cdot P}$$

ω_{oi} : Res. Freq. der i-ten Filterstufe
 Ω_{oi} : normierte Freq. der i-ten Filterstufe
 a_i : Koeffizienten aus Tabelle
 P : Normierte Frequenz

2. Ordnung

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q_1 \cdot \omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_i \cdot \Omega_{oi}} P + \left(\frac{P}{\Omega_{oi}}\right)^2}$$

$$H(P) = \frac{1}{1 + a_i P + b_i P^2}$$

$$a_i = \frac{2\xi}{\Omega_{oi}} \quad b_i = \frac{1}{\Omega_{oi}^2}$$

a_i, b_i : Koeffizienten aus Tabelle
 P : Normierte Frequenz

3. Ordnung
 $H_{3Ord}(P) = H_{1Ord}(P) \cdot H_{2Ord}(P)$

4. Ordnung
 $H_{4Ord}(P) = H_{2Ord}(P) \cdot H_{2Ord}(P)$

Bis zu einer Dämpfung von 6dB kann ein Filter 2. Ordnung durch 2. Filter 1. Ordnung realisiert werden.

$$f_x = \sqrt{f_{01} \cdot f_{02}}$$

5.3 Optimierte Tiefpassfiltertypen

Gaussfilter Serie von n Tiefpässen 1. Ordnung

$$H(P) = \left(\frac{1}{1 + \frac{P}{\Omega_{oi}}} \right)^n \quad \Omega_{oi} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Optimierung:

Kein Überschwingen der Schrittantwort

Charakteristik:

N Identische Pole oberhalb von f_g (N Filterstufen 1. Ordnung)

n : Anzahl Filterstufen

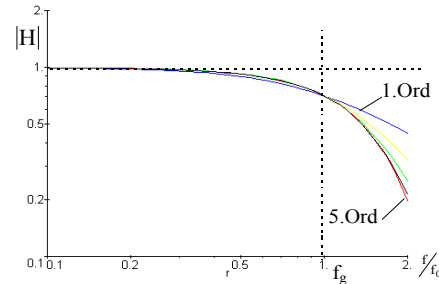
Besselfilter

Optimierung:

optimal flacher Verlauf der Phasenlaufzeit (=optimales Impulsübertragungsverhalten)

Charakteristik:

alle Eigenfrequenzen oberhalb von f_g



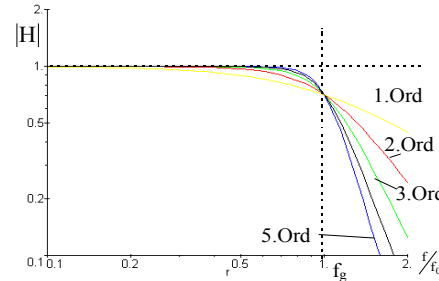
Butterworthfilter

Optimierung:

optimal flacher Verlauf der Dämpfung (Keine Welligkeit)

Charakteristik:

Alle Eigenfrequenzen gleich $=f_g$



Chebyshev I

Optimierung: optimal steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Durchlassbereich toleriert)

Charakteristik:

alle Eigenfrequenzen unterhalb f_g

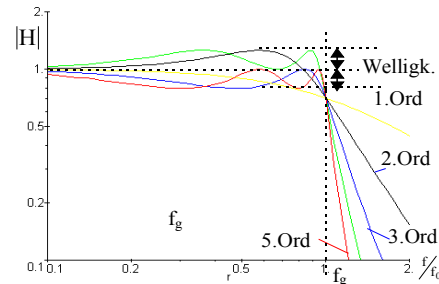
1 Höcker -> 2 Ordnung

2 Höcker -> 4 Ordnung

4 Höcker -> 8 Ordnung

Ungerade Ordnungszahl Höcker sind unter 1.

Geradzahlige Ordnungszahl Höcker sind über 1.



Chebyshev II

Optimierung: optimaler steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Sperrbereich toleriert)

Charakteristik:

Dämpfung im Durchlassbereich analog zu Butterworth; zusätzlich Nullstellen oberhalb f_g

Chebyshev III

Optimierung: optimal steiler Dämpfungsverlauf oberhalb f_g (Welligkeit im Durchlass und Sperrbereich toleriert)

Charakteristik:

Kombination von Chebyshev I und II

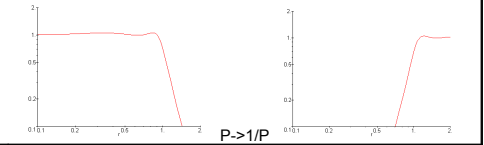
5.4 Transformation Tiefpass \leftrightarrow Hochpass

Allgemein gilt:

$$H_{HP}(P) = H_{TP}\left(\frac{1}{P}\right)$$

$$H_{TP}(P) = H_{HP}\left(\frac{1}{P}\right)$$

Entspricht der Substitution $P \rightarrow 1/P$



5.5 Pol - Nullstellen Diagramm

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots}$$

durch faktorisieren

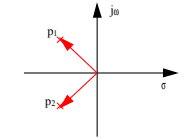
$$H(s) = \frac{(s - z_0)(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2) \dots}$$

z_i : Nullstellen

p_i : Pole

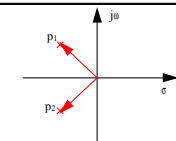
Die Pole u.o Nullstellen sind

- entweder reell
- oder paarweise conj. komplex



5.6 Stabilitätskriterium

Alle Pole liegen in der linken Halbebene



6. Digitalfilter

6.1.1 Allgemein

Zeitbereich

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots$$

Bildbereich

$$y = x(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots) - y(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots)$$

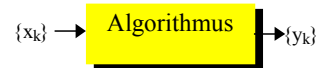
Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{y}{x} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

Frequenzgang

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f/f_s}}$$

- y_k : Diskrete Werte des Ausgangssignal
- x_k : Diskrete Werte des Eingangssignal
- z^{-1} : Verzögerung um einen Schritt
- $H(z)$: Z-Transformierte Funktion
- f_s : Samplingfrequenz [Hz]
- f : Frequenz [Hz]
- a_k, b_k : Koeffizienten []



6.2 FIR- Filter (Finite Impulse Response)

Eigenschaften

- Beliebiges Verhalten realisierbar
- Meist aufwendiger als IIR
- Grundsätzlich stabil

Ordnung des Filters

$$N \approx 5 \cdot \frac{f_s}{B_{\text{rolloff}}}$$

B_{Rolloff} : Rolloff 50% der Amplitude siehe 8.1 [Hz]

f_s : Sampling Frequenz [Hz]

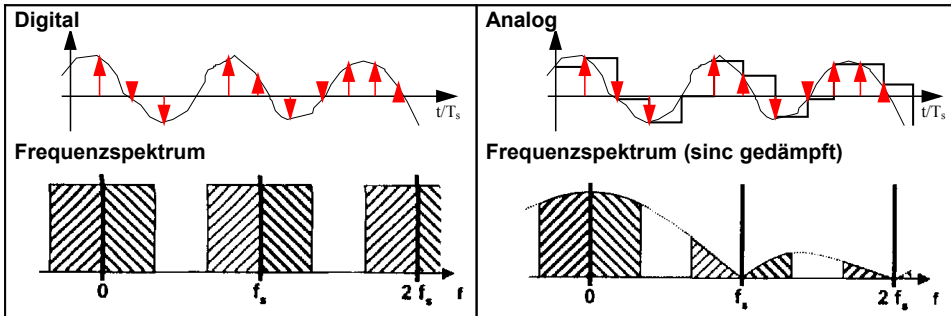
6.3 IIR- Filter (Infinite Impulse Response)

Eigenschaften

- Instabilität möglich
- Verschiedene Strukturvarianten
- Filterordnung vergleichbar mit derjenigen von Analogfiltern

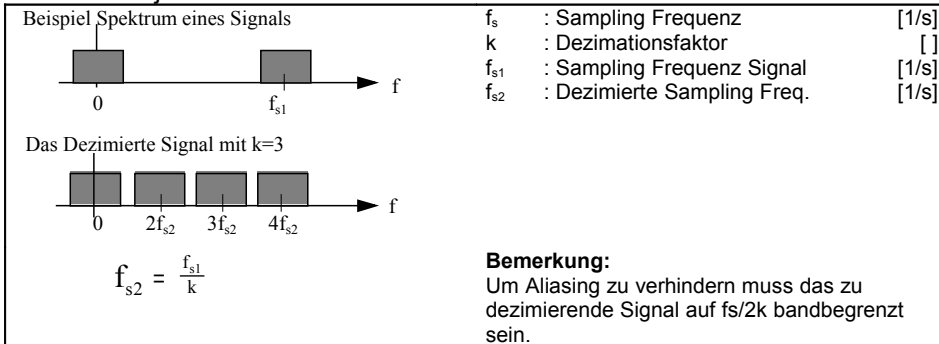
7. Up and Downsampling

7.1 Digital Analog Wandlung mit Hold



7.2 Ganzzahliges Downsampling (Dezimation)

Es wird nur jeder k-te Wert übernommen.



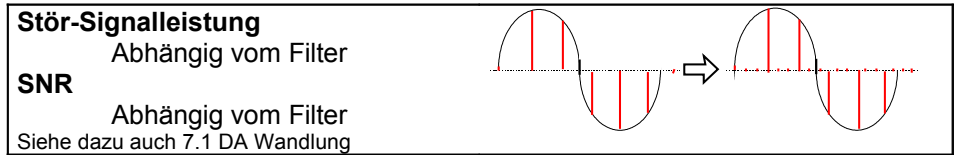
7.3 Upsampling

7.3.1 Abschätzung der Störleistung für sinusförmige Signale

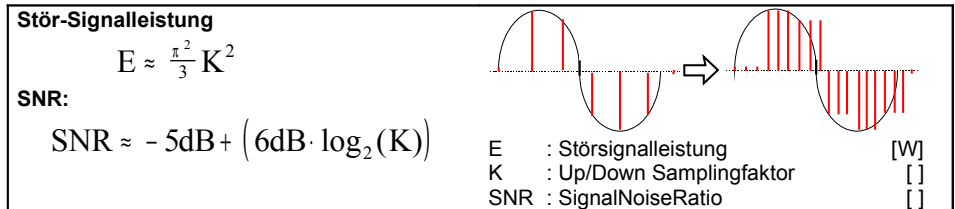
$$K = \frac{f_{s1}}{f_{sig}}$$

f_{sig}	: Signalfrequenz	[Hz]
f_{s1}	: Abtastfrequenz (vor Upsampling)	[Hz]
K	: Up/Down Samplingfaktor	[]

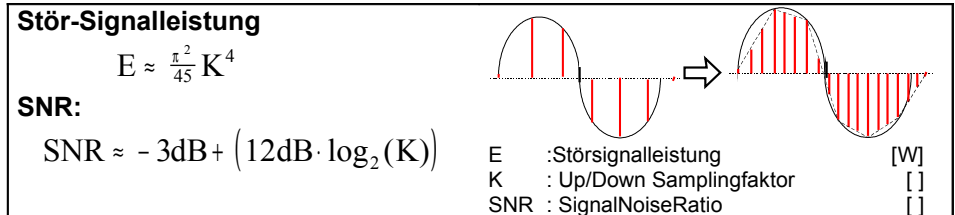
7.3.1 Zero Insert mit Tiefpass Filter



7.3.2 Repeat



7.3.3 Linearinterpolation



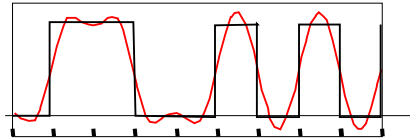
7.4 Up-/Downsampling mit beliebigen Faktoren

Wird durch die Kombination von Up und Downsampling erreicht.

8. Pulse Shaping

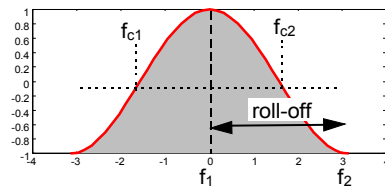
Bei der Übertragung digitaler Signale sind zwei Forderungen zu erfüllen:
 ⇒ Auf der Senderseite müssen schnelle Signalwechsel möglichst vermieden werden um Bandbreite zu reduzieren
 ⇒ Im Empfänger müssen Empfangsstörungen wirksam unterdrücken

Sowohl auf der Sender- wie auch auf der Empfängerseite benötigt man also einen Tiefpassfilter. Dieser Filter soll nur gerade die Grundwelle der kürzesten Impulse durchlassen. Dieses Problem kann am besten mit einem sogenannten Raised-Cosine Filter gelöst werden.



8.1 Raised-Cosine (RC) Filter

Raised-Cosine Filter sind dadurch gekennzeichnet, dass vom Durchlassbereich bis zum Sperrbereich ein Cosinusförmiger Verlauf aufweist.



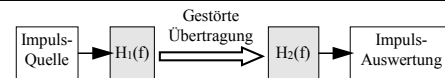
Rolloff Faktor:

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

f_{c1}, f_{c2} : Cutoff Frequenz (Ampl. 50%)
 r : Rollofffaktor
 f_1, f_2 : Rolloffbereich

8.2 Square Root Option

Die bestmögliche Übertragung wird von Impulsen erreicht, wenn zwischen Impulsquelle und Impulsauswertung ein gesamtfilterung eines Raised Cosine Filter wirksam ist.



Somit gilt

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

und damit auch

$$H_1(f) = H_2(f) = \sqrt{H(f)}$$

f : Frequenz [Hz]
 $H()$: Übertragungsfunktion cos-Filter []